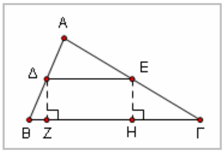
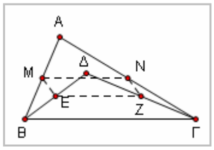
5.3 Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

α Εφαρμογές στα τρίγωνα



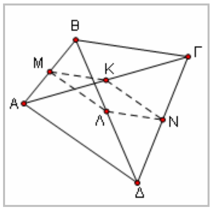
α.1● Στο τρίγωνο $\mathbf{ΑΒΓ}$ είναι $\mathbf{ΔΕ // ΒΓ}$ (1)
Επίσης $\mathbf{ΔΖ \perp ΒΓ}$, $\mathbf{ΕΗ \perp ΒΓ}$, άρα $\mathbf{ΔΖ // ΕΗ}$ (2)
Από τις (1), (2) έχουμε ότι το $\mathbf{ΔΕΗΖ}$ είναι παραλληλόγραμμο.



α.2● Στο τρίγωνο $\mathbf{ΑΒΓ}$ είναι $\mathbf{ΜΝ = // \frac{ΒΓ}{2}}$.

Ομοίως στο τρίγωνο $\mathbf{ΒΔΓ}$ είναι $\mathbf{ΕΖ = // \frac{ΒΓ}{2}}$

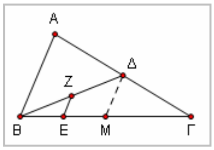
οπότε $\mathbf{ΕΖ = // ΜΝ}$ δηλαδή το $\mathbf{ΜΝΖΕ}$ είναι παραλληλόγραμμο.



α.3● Έστω $\mathbf{Κ}$, $\mathbf{Λ}$, $\mathbf{Μ}$, $\mathbf{Ν}$ τα μέσα των διαγωνίων και των δύο απέναντι πλευρών. Στο τρίγωνο $\mathbf{ΑΒΓ}$ είναι $\mathbf{ΜΚ = // \frac{ΒΓ}{2}}$

Ομοίως στο τρίγωνο $\mathbf{ΔΒΓ}$ είναι $\mathbf{ΛΝ = // \frac{ΒΓ}{2}}$

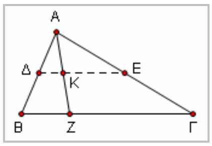
οπότε $\mathbf{ΜΚ = // ΛΝ}$ δηλαδή το $\mathbf{ΜΚΝΛ}$ είναι παραλληλόγραμμο.



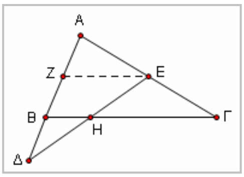
α.4● Στο τρίγωνο $\mathbf{ΑΒΓ}$ είναι $\mathbf{ΔΜ // ΑΒ}$ (1) και $\mathbf{ΔΜ = \frac{ΑΒ}{2}}$ (2)

Ομοίως στο τρίγωνο $\mathbf{ΒΜΔ}$ είναι $\mathbf{ΖΕ // ΔΜ}$ (3) και $\mathbf{ΖΕ = \frac{ΔΜ}{2}}$ (4)

α) από τις (1), (3) έχουμε ότι $\mathbf{ΕΖ // ΑΒ}$ **β)** από τις (2), (4) έχουμε ότι $\mathbf{ΑΒ = 4ΖΕ}$

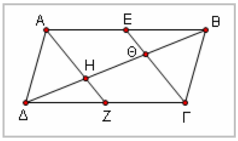


α.5● Στο τρίγωνο $\mathbf{ΑΒΓ}$ είναι $\mathbf{ΔΕ // ΒΓ}$
Στο τρίγωνο $\mathbf{ΑΒΖ}$ από το μέσο $\mathbf{Δ}$ έχουμε παράλληλη την $\mathbf{ΔΚ}$ προς τη $\mathbf{ΒΖ}$, οπότε $\mathbf{Κ}$ μέσο της $\mathbf{ΑΖ}$

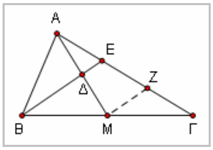


α.6● Έστω $\mathbf{Ζ}$ το μέσο της $\mathbf{ΑΒ}$ και $\mathbf{Η}$ το σημείο τομής των $\mathbf{ΔΕ}$ και $\mathbf{ΒΓ}$. Στο τρίγωνο $\mathbf{ΑΒΓ}$ είναι $\mathbf{ΖΕ // ΒΓ}$.
Στο τρίγωνο $\mathbf{ΔΕΖ}$ από το μέσο $\mathbf{Β}$ έχουμε παράλληλη την $\mathbf{ΒΗ}$ προς τη $\mathbf{ΕΖ}$, οπότε $\mathbf{Η}$ μέσο της $\mathbf{ΔΕ}$

α.7● Είναι $\mathbf{AE = /\!/ Z\Gamma}$ άρα το $\mathbf{AE\Gamma Z}$ είναι παραλληλόγραμμο. Στο τρίγωνο $\mathbf{ABH}$ από το μέσο $\mathbf{E}$ έχουμε παράλληλη την $\mathbf{E\Theta}$ προς τη $\mathbf{AH}$, οπότε $\mathbf{\Theta}$ μέσο της $\mathbf{BH}$ ή $\mathbf{B\Theta = \Theta H}$
Ομοίως στο τρίγωνο $\mathbf{\Delta\Theta\Gamma}$ από το μέσο $\mathbf{Z}$ έχουμε παράλληλη την $\mathbf{HZ}$ προς τη $\mathbf{\Theta\Gamma}$, οπότε $\mathbf{H}$ μέσο της $\mathbf{\Delta\Theta}$ ή $\mathbf{\Delta H = \Theta H}$. Άρα $\mathbf{\Delta H = \Theta H = BH}$

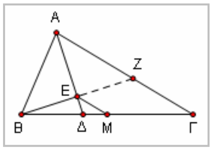


α.8● Φέρνουμε $\mathbf{MZ /\!/ BE}$. Στο τρίγωνο $\mathbf{BE\Gamma}$ από το μέσο $\mathbf{M}$ έχουμε παράλληλη την $\mathbf{MZ}$ προς τη $\mathbf{BE}$, οπότε $\mathbf{Z}$ μέσο της $\mathbf{E\Gamma}$ ή $\mathbf{\Gamma Z = ZE}$.
Στο τρίγωνο $\mathbf{AMZ}$ από το μέσο $\mathbf{\Delta}$ έχουμε παράλληλη την $\mathbf{\Delta E}$ προς τη $\mathbf{MZ}$, οπότε $\mathbf{E}$ μέσο της $\mathbf{AZ}$ ή $\mathbf{AE = ZE}$. Άρα $\mathbf{\Gamma E = 2AE}$

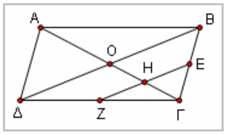


α.9● Το τρίγωνο $\mathbf{ABZ}$ είναι ισοσκελές διότι η $\mathbf{AE}$ είναι ύψος και διχοτόμος. Άρα το $\mathbf{E}$ θα είναι μέσο της $\mathbf{BZ}$.
α) Στο $\mathbf{BZ\Gamma}$ είναι $\mathbf{EM /\!/ \Gamma Z}$ (ενώνει τα μέσα) άρα και $\mathbf{EM /\!/ A\Gamma}$
β) Είναι $\mathbf{2EM = \Gamma Z = A\Gamma - AZ = A\Gamma - AB}$ διότι $\mathbf{AB = AZ}$

γ) Αφού $\mathbf{EM /\!/ A\Gamma}$ θα είναι $\mathbf{\Delta\hat{E}M = \Delta\hat{A}\Gamma = \dfrac{\hat{A}}{2}}$ ως εντός – εκτός κι επί τα΄αυτά.

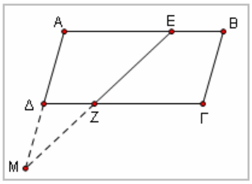


α.10● Φέρνουμε τη διαγώνιο $\mathbf{B\Delta}$. Στο τρίγωνο $\mathbf{\Gamma B\Delta}$ έχουμε $\mathbf{ZE /\!/ \Delta B}$, άρα και $\mathbf{ZH /\!/ \Delta O}$. Στο τρίγωνο $\mathbf{\Delta O\Gamma}$ από το μέσο $\mathbf{Z}$ έχουμε παράλληλη την $\mathbf{ZH}$ προς τη $\mathbf{\Delta O}$, οπότε $\mathbf{H}$ μέσο της $\mathbf{O\Gamma}$. Δηλαδή $\mathbf{\Gamma H = \dfrac{\Gamma O}{2} = \dfrac{A\Gamma}{4}}$

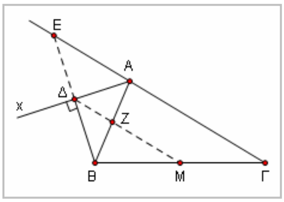


α.11● Είναι $\mathbf{\Delta Z = \dfrac{1}{3}\Gamma\Delta = \dfrac{1}{3}AB = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}AE = \dfrac{1}{2}AE}$

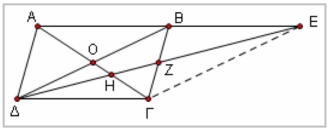
Επίσης είναι και $\mathbf{\Delta Z /\!/ AE}$ οπότε στο τρίγωνο $\mathbf{MAE}$ το τμήμα $\mathbf{EZ}$ θα ενώνει τα μέσα των πλευρών.
(Βλέπε και μεθοδολογία του αντίστοιχου μαθήματος)



α.12● Προεκτείνουμε την $\mathbf{B\Delta}$ η οποία τέμνει την $\mathbf{A\Gamma}$ στο σημείο $\mathbf{E}$. Το τρίγωνο $\mathbf{ABE}$ είναι ισοσκελές διότι η $\mathbf{A\Delta}$ είναι ύψος και διχοτόμος. Άρα το $\mathbf{\Delta}$ θα είναι μέσο της $\mathbf{BE}$.
α) Στο $\mathbf{BE\Gamma}$ αφού $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{M}$ μέσα των πλευρών οπότε $\mathbf{\Delta M /\!/ E\Gamma}$ άρα και $\mathbf{\Delta M /\!/ A\Gamma}$
β) Είναι $\mathbf{2\Delta M = \Gamma E = A\Gamma + AE = A\Gamma + AB}$ διότι $\mathbf{AB = AE}$
γ) Στο τρίγωνο $\mathbf{ABE}$ από το μέσο $\mathbf{\Delta}$ έχουμε παράλληλη την $\mathbf{\Delta Z}$ προς την $\mathbf{AE}$, οπότε $\mathbf{Z}$ μέσο της $\mathbf{AB}$. Επομένως η $\mathbf{\Delta M}$ διχοτομεί την $\mathbf{AB}$.



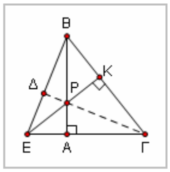
β Βαρύκεντρο και ορθόκεντρο τριγώνου



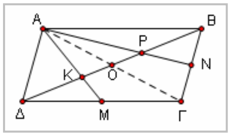
β.1● α) Είναι $ΒΕ = // ΔΓ$ άρα το $ΒΕΓΔ$ θα είναι παραλληλόγραμμο, άρα $ΒΓ$, $ΔΕ$ διχοτομούνται οπότε το $Ζ$ θα είναι μέσο της $ΒΓ$.

β) Στο τρίγωνο $ΒΔΓ$ είναι $ΔΖ$, $ΓΟ$ διάμεσοι, οπότε το σημείο $Η$ θα είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου, άρα $ΓΗ = 2ΟΗ$

γ) Είναι $ΑΗ = ΑΟ + ΟΗ = ΓΟ + ΟΗ = \frac{3}{2}ΓΗ + \frac{1}{2}ΓΗ = \frac{4}{2}ΓΗ = 2ΓΗ$



β.2● Στο τρίγωνο $ΒΕΓ$ είναι $ΒΑ$, $ΕΚ$ ύψη οπότε το σημείο $Ρ$ θα είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου.
Επομένως και το ύψος από την κορυφή $Γ$ θα διέρχεται από το $Ρ$ δηλαδή $ΓΡ \perp ΒΕ$

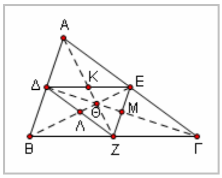


β.3● Έστω $Κ$, $Ρ$ τα σημεία τομής των $ΑΜ$ και $ΑΝ$ αντίστοιχα με την διαγώνιο $ΒΔ$.
Στο τρίγωνο $ΑΔΓ$ είναι $ΔΟ$, $ΑΜ$ διάμεσοι, οπότε το σημείο $Κ$ θα είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.
Ομοίως και στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ το $Ρ$ θα είναι βαρύκεντρο.
Από τις ιδιότητες του βαρύκεντρου έχουμε:

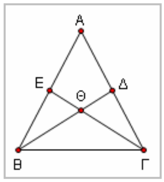
$ΔΚ = \frac{ΔΟ}{2}$ και $ΒΡ = \frac{ΒΟ}{2}$, όμως $ΔΟ = ΒΟ$, άρα $ΔΚ = ΒΡ$.

Τέλος $ΚΟ = \frac{ΔΚ}{2}$ και $ΡΟ = \frac{ΒΡ}{2}$ οπότε $ΚΡ = ΚΟ + ΟΡ = \frac{ΔΚ}{2} + \frac{ΒΡ}{2} = \frac{2ΔΚ}{2} = ΔΚ$

Δηλαδή $ΔΚ = ΚΡ = ΡΒ$



β.4● Έστω $Δ$, $Ε$, $Ζ$ τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$, $ΑΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα. Φέρνουμε τις διαμέσους $ΑΖ$, $ΒΕ$ και $ΓΔ$ οι οποίες τέμνονται στο βαρύκεντρο $Θ$.
Η διάμεσος $ΑΖ$ τέμνει την πλευρά $ΔΕ$ του τριγώνου $ΔΕΖ$ στο σημείο $Κ$. Το $ΑΕΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί $ΑΕ // ΔΖ$ και $ΑΔ // ΕΖ$ οπότε οι διαγώνιοί του θα διχοτομούνται. Επομένως το $Κ$ θα είναι το μέσο της $ΔΕ$, δηλαδή η $ΖΚ$ θα είναι διάμεσος στο τρίγωνο $ΔΕΖ$.
Ομοίως δείχνουμε ότι $ΕΛ$, $ΔΜ$ είναι διάμεσοι στο $ΔΕΖ$ άρα το $Θ$ θα είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.



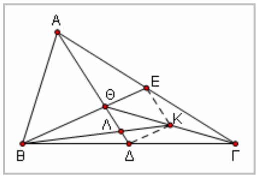
β.5● Έστω $\mathbf{Β Δ = μ_β}$, $\mathbf{ΓΕ = μ_γ}$ και **Θ** βαρύκεντρο.

Είναι $\mathbf{ΒΘ = \frac{2}{3} μ_β}$ και $\mathbf{ΓΘ = \frac{2}{3} μ_γ}$ άρα $\mathbf{ΒΘ = ΓΘ}$

Επίσης $\mathbf{ΔΘ = \frac{1}{3} μ_β}$ και $\mathbf{ΕΘ = \frac{2}{3} μ_γ}$ άρα $\mathbf{ΔΘ = ΕΘ}$

Τέλος είναι $\mathbf{Β\hat{Θ}Ε = Γ\hat{Θ}Δ}$ ως κατακορυφήν, οπότε τα τρίγωνα **ΒΘΕ** και **ΓΘΔ** είναι ίσα (Π-Γ-Π). Άρα $\mathbf{ΒΕ = ΓΔ}$ επομένως και $\mathbf{ΑΒ = ΑΓ}$

....



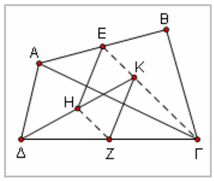
β.6● α) Είναι **Θ** βαρύκεντρο στο τρίγωνο **ΑΒΓ** και **Λ** βαρύκεντρο στο τρίγωνο **ΒΘΓ**.

Επομένως $\mathbf{ΘΛ = \frac{2}{3} ΘΔ}$ και $\mathbf{ΘΔ = \frac{1}{3} ΑΔ}$, άρα $\mathbf{ΘΛ = \frac{2}{9} ΑΔ}$

β) Στο τρίγωνο **ΒΘΓ** είναι $\mathbf{ΚΔ = // \frac{ΒΘ}{2}}$ (μέσα των πλευρών)

Επίσης $\mathbf{ΘΕ = \frac{ΒΘ}{2}}$ (βαρύκεντρο) οπότε $\mathbf{ΚΔ = // ΕΘ}$, **ΘΕΚΔ** παραλληλόγραμμο.

....



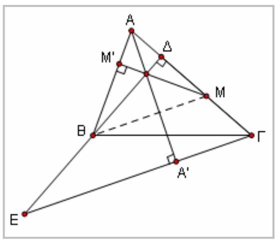
β.7● Φέρνουμε τη διάμεσο **ΓΕ** και τη **ΖΗ**

Το **Κ** είναι βαρύκεντρο του **ΑΒΓ** άρα $\mathbf{ΚΕ = \frac{ΓΚ}{2}}$

Επίσης στο τρίγωνο **ΚΔΓ** είναι $\mathbf{ΖΗ = // \frac{ΓΚ}{2}}$ (μέσα των πλευρών)

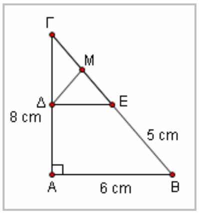
Οπότε $\mathbf{ΚΕ = // ΖΗ}$ δηλαδή **ΚΕΗΖ** παραλληλόγραμμο, άρα $\mathbf{ΕΗ // ΚΖ}$

....



β.8● Φέρνουμε τη **ΒΜ** η οποία ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου **ΔΕΓ** οπότε $\mathbf{ΒΜ // ΕΓ}$
Έστω $\mathbf{ΑΑ' \perp ΕΓ}$. Τότε $\mathbf{ΑΑ' \perp ΒΜ}$, δηλαδή η **ΑΑ'** είναι φορέας ύψους του τριγώνου **ΑΒΜ**.
Επίσης φορείς υψών του ίδιου τριγώνου είναι οι $\mathbf{ΜΜ' \perp ΑΒ}$ και $\mathbf{ΒΔ \perp ΑΓ}$. Άρα θα διέρχονται από το ίδιο σημείο (ορθόκεντρο) του τριγώνου **ΑΒΜ** δηλαδή συντρέχουν.

γ Ιδιότητες ορθογωνίου τριγώνου

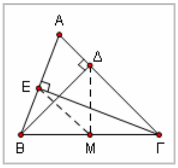


γ.1● Είναι $\mathbf{ΔΕ} = \dfrac{\mathbf{ΑΒ}}{\mathbf{2}} = \mathbf{3\ cm}$ (ενώνει τα μέσα των πλευρών)

Επίσης είναι $\mathbf{ΔΕ // ΑΒ}$, όμως $\mathbf{ΑΒ \perp ΑΓ}$ οπότε και $\mathbf{ΔΕ \perp ΑΓ}$.

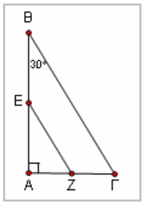
Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathbf{ΔΕΓ}$ θα είναι $\mathbf{ΔΜ} = \dfrac{\mathbf{ΓΕ}}{\mathbf{2}}$.

Όμως $\mathbf{ΓΕ = ΒΕ = 5\ cm}$, άρα $\mathbf{ΔΜ = 2{,}5\ cm}$



γ.2● Έστω $\mathbf{Μ}$ το μέσο της $\mathbf{ΒΓ}$.

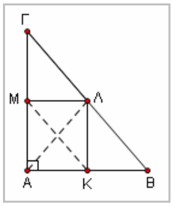
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathbf{ΒΔΓ}$ είναι $\mathbf{ΔΜ} = \dfrac{\mathbf{ΒΓ}}{\mathbf{2}}$ ως διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Ομοίως στο τρίγωνο $\mathbf{ΒΕΓ}$ είναι $\mathbf{ΕΜ} = \dfrac{\mathbf{ΒΓ}}{\mathbf{2}}$, άρα $\mathbf{ΔΜ = ΕΜ}$



γ.3● Είναι $\mathbf{ΕΖ} = \dfrac{\mathbf{ΒΓ}}{\mathbf{2}}$ (ενώνει τα μέσα των πλευρών)

Αφού είναι $\hat{\mathbf{Β}} = \mathbf{30^o}$ θα είναι $\mathbf{ΑΓ} = \dfrac{\mathbf{ΒΓ}}{\mathbf{2}}$.

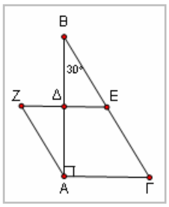
Οπότε $\mathbf{ΕΖ = ΑΓ}$



γ.4● **α)** Είναι $\mathbf{ΜΛ} =// \dfrac{\mathbf{ΑΒ}}{\mathbf{2}}$ οπότε $\mathbf{ΜΛ} =// \mathbf{ΑΚ}$, άρα το $\mathbf{ΑΚΛΜ}$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αφού είναι παραλληλόγραμμο με μία ορθή γωνία.

β) Είναι $\mathbf{ΚΜ} = \dfrac{\mathbf{ΒΓ}}{\mathbf{2}}$ (ενώνει τα μέσα των πλευρών)

και $\mathbf{ΑΛ} = \dfrac{\mathbf{ΒΓ}}{\mathbf{2}}$ (διάμεσος στην υποτείνουσα) επομένως $\mathbf{ΚΜ + ΑΛ = ΒΓ}$

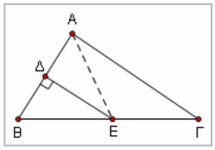


γ.5● Είναι $\mathbf{ΔΕ} =// \dfrac{\mathbf{ΑΓ}}{\mathbf{2}} \Leftrightarrow \mathbf{2ΔΕ} =// \mathbf{ΑΓ} \Leftrightarrow \mathbf{ΖΕ} =// \mathbf{ΑΓ}$

επομένως το $\mathbf{ΑΓΕΖ}$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επίσης αφού $\hat{\mathbf{Β}} = \mathbf{30^o}$ θα είναι $\mathbf{ΑΓ} = \dfrac{\mathbf{ΒΓ}}{\mathbf{2}} = \mathbf{ΓΕ}$

άρα το παραλληλόγραμμο $\mathbf{ΑΓΕΖ}$ αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες θα είναι ρόμβος.

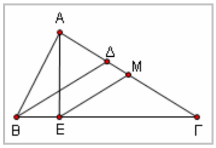


γ.**6●** Στο τρίγωνο $\mathbf{AEB}$ η $\mathbf{E\Delta}$ είναι ύψος και διάμεσος άρα το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές με $\mathbf{AE = EB}$

Όμως $\mathbf{EB} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}}$, άρα $\mathbf{AE} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}}$

οπότε η γωνία $\hat{\mathbf{A}}$ θα είναι ορθή.

....



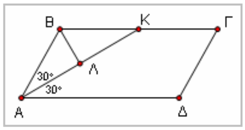
γ.**7●** Αφού είναι $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{2}\hat{\mathbf{\Gamma}}$ και $\mathbf{B\Delta}$ διχοτόμος, άρα $\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{\Gamma} = \hat{\mathbf{\Gamma}}$ (1)

Επίσης αφού $\mathbf{B\Delta} // \mathbf{ME}$ θα είναι $\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{\Gamma} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{E}}\mathbf{\Gamma}$ (2)

Από (1), (2) έχουμε ότι $\hat{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{E}}\mathbf{\Gamma}$ δηλαδή $\mathbf{ME = M\Gamma}$.

Όμως $\mathbf{M\Gamma} = \dfrac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{2}}$. Άρα στο τρίγωνο $\mathbf{AE\Gamma}$ είναι $\mathbf{ME} = \dfrac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{2}}$ οπότε $\mathbf{A}\hat{\mathbf{E}}\mathbf{\Gamma} = \mathbf{90^o}$

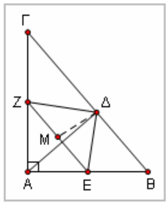
....



γ.**8●** Αφού $\mathbf{A\Delta} // \mathbf{B\Gamma}$ θα είναι $\mathbf{B}\hat{\mathbf{K}}\mathbf{A} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{K} = \mathbf{30^o}$
άρα το τρίγωνο $\mathbf{ABK}$ θα είναι ισοσκελές και αφού η $\mathbf{B\Lambda}$ είναι διάμεσος, θα είναι διχοτόμος και ύψος.
Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathbf{AB\Lambda}$

αφού $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{30^o}$ θα είναι $\mathbf{B\Lambda} = \dfrac{\mathbf{AB}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{\Gamma\Delta}}{\mathbf{2}}$

....



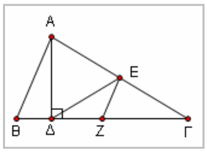
γ.**9●** α) Είναι $\mathbf{\Delta E} = \dfrac{\mathbf{AB}}{\mathbf{2}}$ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $\mathbf{A\Delta B}$

και $\mathbf{\Delta Z} = \dfrac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{2}}$ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $\mathbf{A\Delta\Gamma}$

οπότε τα τρίγωνα $\mathbf{AZE}$ και $\mathbf{\Delta ZE}$ είναι ίσα ($\mathbf{\Delta E = AE}$, $\mathbf{\Delta Z = AZ}$ και $\mathbf{EZ}$ κοινή) άρα $\mathbf{E}\hat{\mathbf{\Delta}}\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{90^o}$

β) Είναι $\mathbf{\Delta M} = \dfrac{\mathbf{EZ}}{\mathbf{2}}$ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $\mathbf{\Delta EZ}$, αλλά $\mathbf{EZ} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{2}}$ γιατί ενώνει τα μέσα των πλευρών, άρα $\mathbf{\Delta M} = \dfrac{\mathbf{B\Gamma}}{\mathbf{4}}$

....

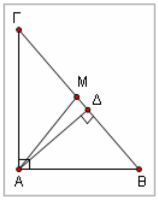


γ.**10●** Είναι $\mathbf{E}\hat{\mathbf{Z}}\mathbf{\Gamma} = \mathbf{E}\hat{\mathbf{\Delta}}\mathbf{Z} + \mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{E}}\mathbf{Z}$ ($\mathbf{E}\hat{\mathbf{Z}}\mathbf{\Gamma}$ εξωτερική του τριγώνου)

Άρα $\mathbf{E}\hat{\mathbf{Z}}\mathbf{\Gamma} - \mathbf{E}\hat{\mathbf{\Delta}}\mathbf{Z} = \mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{E}}\mathbf{Z}$ (1) Ακόμη $\mathbf{ZE} // \mathbf{AB}$ οπότε $\mathbf{E}\hat{\mathbf{Z}}\mathbf{\Gamma} = \hat{\mathbf{B}}$
Επίσης αφού είναι $\mathbf{\Delta E}$ διάμεσος στο ορθογώνιο $\mathbf{A\Delta\Gamma}$

το τρίγωνο $\mathbf{\Delta E\Gamma}$ θα είναι ισοσκελές, οπότε $\mathbf{E}\hat{\mathbf{\Delta}}\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{\Gamma}}$

αρά από την (1) $\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{E}}\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{\Gamma}}$



γ.**11**● Είναι $\mathbf{M\hat{A}\Delta = M\hat{A}B - \Delta\hat{A}B}$ (1)

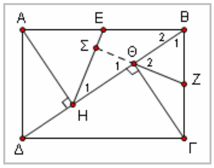
Επίσης $\mathbf{AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB}$ αφού είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο

δηλαδή το τρίγωνο **ΜΑΒ** είναι ισοσκελές, άρα $\mathbf{M\hat{A}B = \hat{B}}$ (2)

Τέλος $\mathbf{\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B}$ (3) ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές.

Άρα η (1) με τις (2), (3) γίνεται $\mathbf{M\hat{A}\Delta = \hat{B} - \hat{\Gamma}}$

....



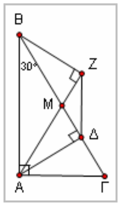
γ.**12**● Στο ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΗΒ** η **ΗΕ** είναι διάμεσος στην υποτείνουσα οπότε $\mathbf{HE = \frac{AB}{2} = EB}$, άρα $\mathbf{\hat{H}_1 = \hat{B}_2}$.

Ομοίως στο ορθογώνιο τρίγωνο **ΘΒΓ** είναι $\mathbf{\hat{\Theta}_2 = \hat{B}_1}$ και

επειδή $\mathbf{\hat{\Theta}_2 = \hat{\Theta}_1}$, έχουμε $\mathbf{\hat{\Theta}_1 = \hat{B}_1}$. Έτσι είναι $\mathbf{\hat{H}_1 + \hat{\Theta}_1 = \hat{B}_2 + \hat{B}_1 = 90^o}$.

Άρα στο τρίγωνο **ΘΣΗ** θα είναι και $\mathbf{\hat{\Sigma} = 90^o}$, δηλαδή $\mathbf{\Theta Z \perp EH}$

....



γ.**13**● Τα τρίγωνα **ΒΖΜ** και **ΑΜΔ** είναι ίσα ($\mathbf{AM = BM}$, $\mathbf{\hat{Z} = \hat{\Delta} = 90^o}$ και $\mathbf{A\hat{M}\Delta = B\hat{M}Z}$) άρα $\mathbf{BZ = A\Delta}$.

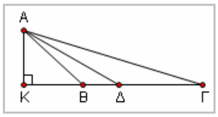
Επίσης $\mathbf{B\hat{M}A = 120^o}$ άρα $\mathbf{B\hat{M}Z = 60^o}$, οπότε $\mathbf{M\hat{B}Z = 30^o}$ (1)

Ακόμη το τρίγωνο **ΜΖΔ** είναι ισοσκελές με $\mathbf{M\Delta = MZ}$ και $\mathbf{Z\hat{M}\Delta = 120^o}$

άρα $\mathbf{M\hat{\Delta}Z = 30^o}$ (2). Από (1), (2) έχουμε $\mathbf{M\hat{\Delta}Z = M\hat{B}Z}$ άρα $\mathbf{BZ = Z\Delta}$

....

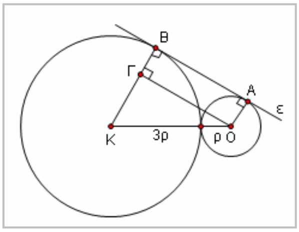
γ.**14**● Είναι $\mathbf{A\hat{\Delta}K = \hat{\Gamma} + \Gamma\hat{A}\Delta \Leftrightarrow A\hat{\Delta}K = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} = A\hat{\Delta}K - \hat{\Gamma}}$



Επίσης $\mathbf{A\hat{\Delta}K + \hat{B} + B\hat{A}\Delta = 180^o \Leftrightarrow A\hat{\Delta}K + \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2} = 180^o}$

Άρα $\mathbf{A\hat{\Delta}K + \hat{B} + A\hat{\Delta}K - \hat{\Gamma} = 180^o}$, οπότε αφού $\mathbf{\hat{B} - \hat{\Gamma} = 120^o}$

θα είναι $\mathbf{A\hat{\Delta}K = 30^o}$, άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο **ΚΑΔ** είναι $\mathbf{A\Delta = 2AK}$



γ.**15**● Φέρνουμε την $\mathbf{O\Gamma \perp KB}$, τότε στο ορθογώνιο $\mathbf{AB\Gamma O}$ είναι $\mathbf{B\Gamma = OA = \rho}$ και επομένως

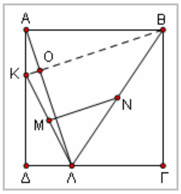
$\mathbf{K\Gamma = KB - B\Gamma = 3\rho - \rho = 2\rho}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\mathbf{OK\Gamma}$ είναι $\mathbf{K\Gamma = 2\rho}$ και $\mathbf{OK = 4\rho}$

δηλαδή $\mathbf{K\Gamma = \dfrac{OK}{2}}$. Άρα $\mathbf{\Gamma\hat{O}K = 30^o}$ και $\mathbf{B\hat{K}O = 60^o}$

Όμως οι γωνίες $\mathbf{A\hat{O}K}$ και $\mathbf{B\hat{K}O}$ είναι παραπληρωματικές, ως εντός κι επί τα αυτά παραλλήλων, άρα $\mathbf{A\hat{O}K = 120^o}$

....

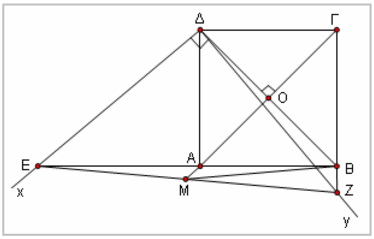


γ.**16**● Εφόσον $\mathbf{MN /\!/ KB}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbf{A\Lambda \perp KB}$ και έστω $\mathbf{O}$ το σημείο τομής των $\mathbf{A\Lambda}$ και $\mathbf{KB}$. Από την ισότητα των τριγώνων $\mathbf{AKB}$ και $\mathbf{A\Delta\Lambda}$ προκύπτει ότι $\mathbf{A\hat{\Lambda}\Delta = A\hat{K}B}$ οπότε στο τρίγωνο $\mathbf{AKO}$ έχουμε

$$\mathbf{K\hat{A}O + A\hat{K}O = K\hat{A}O + A\hat{\Lambda}\Delta = 180^o - \hat{\Delta} = 90^o}$$

και επομένως $\mathbf{A\hat{O}K = 90^o}$, δηλαδή $\mathbf{A\Lambda \perp KB}$

....



γ.**17**● Αν είναι $\mathbf{M}$ το μέσο της $\mathbf{EZ}$ θα δείξουμε ότι το $\mathbf{M}$ ισαπέχει από τα $\mathbf{B}$, $\mathbf{\Delta}$ οπότε θα ανήκει στη μεσοκάθετο της $\mathbf{B\Delta}$ που είναι η $\mathbf{A\Gamma}$. Πράγματι το τρίγωνο $\mathbf{BZE}$ είναι ορθογώνιο στη $\mathbf{\hat{B}}$ και η $\mathbf{BM}$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $\mathbf{BM = \dfrac{EZ}{2}}$ (1). Το τρίγωνο $\mathbf{\Delta EZ}$ είναι ορθογώνιο ($\mathbf{E\hat{\Delta}Z = 90^o}$) και η $\mathbf{\Delta M}$ διάμεσος προς την υποτείνουσα $\mathbf{EZ}$, άρα θα είναι και $\mathbf{\Delta M = \dfrac{EZ}{2}}$ (2). Από τις (1) και (2) ισχύει $\mathbf{MB = M\Delta}$

Εργασία

1▢ Λ **2▢ Σ** **3▢ Σ** **4▢ Σ** **5▢ Σ**

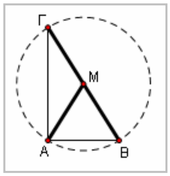
6✳ ☐Β **7✳ ☐Α** **8✳ ☐Β** **9✳ ☐Δ**

10☞ $\mathbf{1 \to \gamma}$, $\mathbf{2 \to \beta}$, $\mathbf{3 \to \delta}$

....

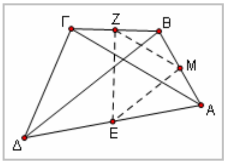
11● Στο ισόπλευρο τρίγωνο.

12● Είναι $\mathbf{MA = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma}$



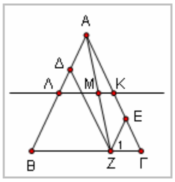
οπότε ο κύκλος **(M , MB)** διέρχεται από τα **A** και **Γ**

13● Έστω **M** μέσο της **AB**, τότε στο τρίγωνο **ABΔ** το **E** είναι μέσο της **AΔ** οπότε $\mathbf{ME = /\!/ \frac{B\Delta}{2}}$. Στο τρίγωνο **ABΓ** είναι **Z**, **M** μέσα των **BΓ**, **BA**, άρα $\mathbf{ZM = /\!/ \frac{A\Gamma}{2}}$



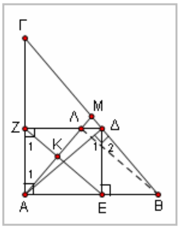
Στο τρίγωνο **MEZ** όμως ισχύει $\mathbf{EZ < ME + MZ = \frac{B\Gamma}{2} + \frac{A\Gamma}{2} < \frac{B\Delta}{2} + \frac{B\Delta}{2} = B\Delta}$

14● Όταν είναι $\mathbf{E \equiv \Gamma}$ και $\mathbf{\Delta \equiv A}$ τότε το **M** είναι μέσο της **AΓ**
Ομοίως όταν $\mathbf{E \equiv A}$ και $\mathbf{\Delta \equiv B}$ τότε το **M** είναι μέσο της **AB**
Φέρνουμε την **EZ // AB**, τότε είναι $\mathbf{\hat{Z}_1 = \hat{B} = \hat{\Gamma}}$, άρα το τρίγωνο **EZΓ** είναι ισοσκελές, οπότε το **AΔZE** είναι παραλληλόγραμμο



γιατί $\mathbf{EZ = /\!/ A\Delta}$. Επομένως το μέσο **M** της **ΔE** θα είναι και μέσο της **AZ**.
Ο γεωμετρικός τόπος του μέσου **M** της **AZ** όταν το **Z** κινείται στη **BΓ** είναι η σταθερή ευθεία **KΛ**
Αντίστροφα, αν **M** τυχαίο σημείο της **ΛK**, η **AM** τέμνει τη **BΓ** στο **Z**. Οι παράλληλες **ZE** και **ZΔ** προς τις **AB** και **AΓ** αντίστοιχα, σχηματίζουν παραλληλόγραμμο **AΔZE**, δηλαδή $\mathbf{A\Delta = ZE = E\Gamma}$. Επειδή **AZ**, **ΔE** διαγώνιοί του, θα διχοτομούνται, άρα η **ΔE** διέρχεται από το μέσο **M** της **AZ**

15● **α)** Το **AEΔZ** είναι ορθογώνιο (έχει **3** ορθές γωνίες) άρα θα έχει ίσες διαγωνίους.
β) Έστω **K** η τομή των **AM**, **EZ**
Στο τρίγωνο **KZA**, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbf{\hat{Z}_1 + \hat{A}_1 = 90^o}$
Είναι $\mathbf{AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma}$ οπότε το **MAΓ** ισοσκελές άρα $\mathbf{\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}}$ (1)



Ακόμη τα τρίγωνα **ZAE** και **ΔAE** είναι ίσα, άρα $\mathbf{\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1}$. Αλλά $\mathbf{\hat{B} = \hat{\Delta}_1}$ ως οξείες με κάθετες πλευρές άρα $\mathbf{\hat{Z}_1 = \hat{B}}$ (2).
Προσθέτουμε (1)+(2) $\mathbf{\hat{A}_1 + \hat{Z}_1 = \hat{\Gamma} + \hat{B} = 90^o}$
γ) Έστω **Λ** η τομή των **AM**, **ZΔ**. Αρκεί να αποδείξουμε ότι **BΛ // EZ** ή αρκεί ότι το **BΛZE** είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή όμως **ZΛ // EB**, αρκεί να αποδείξουμε ότι **ZΛ = EB**, το οποίο ισχύει διότι τα τρίγωνα **AZΛ** και **ΔEB** είναι ίσα.